**Лекція 8**

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

8.1. Алгебраїчні криві першого порядку

Розглянемо криві, які в заданій прямокутній системі координатописуються алгебраїчним рівнянням першого порядку **, де хоча б один з коефіцієнтів *a* або *b* відмінний від нуля (за умови що коефіцієнти *a* та *b* одночасно не обертаються в нуль, ). Це рівняння називають **лінійним рівнянням**.

**Теорема 8.1.** Будь пряма на площині є алгебраїчною кривою першого порядку і будь-яка алгебраїчна крива першого порядку на площині є прямою.

**Доведення.** Розглянемо довільну пряму *L* на площині. Нехай точка  лежить на *L*, а ненульовий вектор ― перпенди-кулярний цій прямій. При таких вихідних умовах довільна точка *M*(*x; y*)належить прямій *L* тоді і тільки тоді, коли вектор  ортогональний вектору *n* (рис*.*8.1.)

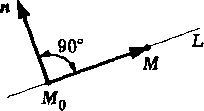


Рис. 8.1.

Знаючи координати векторів  та *,* запишемо умову ортогональності цих векторів через їх скалярний добуток:  або , де . Оскільки , то або , або. Перше твердження теореми доведено.

Для доведення другого розглянемо довільне рівняння першого порядку з двома невідомими , . Це рівняння має хоча б один розв’язок. Наприклад, якщо , то розв’язком рівняння є . Це означає, що геометричний образ рівняння є непорожнім і містить певні точки. Нехай точка  належить вказаному образу, тобто виконується рівність . Віднімемо цю рівність від рівняння . В результаті отримаємо нове рівняння, еквівалентне вихідному. Це нове рівняння після перегрупування доданків набуде вигляду: . Отримане рівняння є умовою ортогональності векторів  і , де *М* - це точка з координатами . Отже, якщо точка належить геометричному образу рівняння , то вектор *n* ортогональний вектору , тобто точка *М* належить прямій, що проходить через точку перпен-дикулярно вектору ●

Рівняння виду , називають **загальним рівнянням прямої.**

Коефіцієнти *a* і *b* в загальному рівнянні прямої мають простий геометричний зміст. Це координати вектора, що перпендикулярний прямій. Такий вектор називають **нормальним вектором прямої**. Він, як і загальне рівняння прямої, визначається з точністю до (ненульового) числового множника.

Нехай пряма *L* задана рівнянням , . Якщо точка  належить прямій *L*, то її координати задовольняють рівнянню, тобто . В будь-якій точці , що не належить прямій *L*, значення лівої частини рівняння ,  дорівнює

Знак скалярного добутку  визначається кутом між вектором  і нормальним вектором прямої .

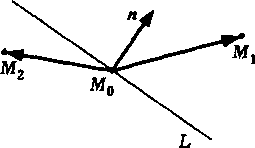
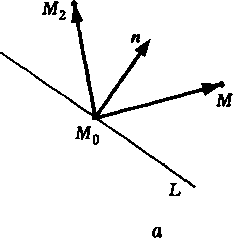
 

Рис. 8.2. Рис. 8.3.

Якщо точки і  розташовані по одну сторону від прямої *L* (рис. 8.3) то, підставивши їх координати в ліву частину рівняння , , ми отримаємо значення з одним знаком. Якщо така підстановка координат точок і призводить до значень із різними знаками, то ці точки лежать по різні сторони від прямої *L* (рис. 8.2).

◄Приклад 7.1. З'ясувати, як по відношенню до прямої  розташовані точки *А(4, 4)* і *В(6, 6)*.

Розв’язання. Підставимо координати точки *А* в ліву частину загального рівняння прямої, отримаємо (+1), а підстановка координат точки *В* призводить до числа (-1). Отже, точки *А* та *В* розташовані по різні боки від даної прямої.►

Рівняння  дозволяє за координатами точки на прямій *L* і координатам нормального вектора прямої *L* записати рівняння прямої без додаткових обчислень.

8.1.1. Спеціальні види рівняння прямої

Крім *загального рівняння прямої* на площині часто використовують й інші види рівнянь прямої: кожному виду рівняння відповідає свій геометричний зміст коефіцієнтів. Зафіксуємо на площині прямокутну систему координат *Оху*.

**Рівняння з кутовим коефіцієнтом**. Визначимо пряму *L* на площині, задавши точку  на цій прямій і кут φ, на який треба повернути проти годинникової стрілки вісь абсцис *Ох* до співпадіння з прямою.

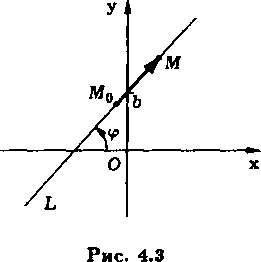


Рис. 8.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Припустимо, що . Точка *М* (*х*; *у*) належить прямій *L* тоді і тільки тоді, коли вектор  утворює з віссю *Ох* кут φ або π-φ, при цьому відношення координат цього вектора дорівнює *tg* φ. Цю умову можна записати у вигляді: . Знаходячи *у*, приходимо до рівняння

, де .

Рівняння виду  називаютьрівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом. Параметр *k* (кутовий коефіцієнт прямої) дорівнює тангенсу кута нахилу прямої. Параметр *b* дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю *Оу*.

**Векторне і параметричні рівняння прямої.** Визначимо пряму *L* на площині точкою на цій прямій і ненульовим вектором, що паралельний їй. Такий вектор *s* називаютьнапрямним вектором прямої *L* (рис. 8.5).

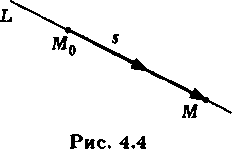


Рис. 8.5. Векторне і параметричне рівняння прямої

Якщо точка *М* (*х; у*) належить прямий *L*, то це еквівалентно тому, що вектор  колінеарний вектору , тобто ці вектори належать одному і

тому ж простору . Оскільки, вектор  не дорівнює нульовому, він утворює базис в цьому просторі . Отже, для деякого числа *t* виконується рівність . Скориставшись тим, що , , запишемо цю рівність в координатах:

,

або

.

Це рівняння називають параметричними рівняннями прямої. Точка , що лежить на прямій, відповідає значенню параметра *t =* 0.

Якщо рівність  записати через радіус-вектори і  точок і  відповідно, то в результаті отримаємо векторне рівняння прямої

 або .

**Канонічне рівняння прямої**. Колінеарність векторів  і  еквівалентна рівності відношення їх однойменних координат:



Це рівняння називають **канонічним рівнянням прямої**.

**Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки**.

Задамо пряму *L* на площині двома різними точками  та на ній. Тоді вектор  є напрямним вектором  прямої *L*. Підставимо координати цього вектора і координати точки в канонічне рівняння прямої. Отримаємо .

Це рівняння називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

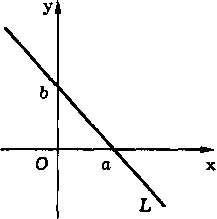
**Рівняння прямої у відрізках**. Визначимо пряму *L* її точками *А (а, 0) і В (0, b)* перетину з осями координат, припускаючи, що ці дві точки не збігаються з початком системи координат, тобто що  і .

Рис. 7.6. Рівняння прямої у відрізках

Запишемо рівняння прямої *L* у вигляді *рівняння прямої, що проходить через дві точки А* та *В*, де *А* – точка перетину з віссю *Ох*, а *В* – точка перетину прямої з віссю *Оу*:

,

звідки  або .

Це рівняння прямої називають**рівнянням прямої в відрізках*.***

**Нормальне рівняння прямої**. Визначимо пряму *L* за допомогою одиничного вектора , що перпендикулярний їй, і відстані *р>* 0 до прямої від початку системи координат. Існують два одиничних вектора, що перпендикулярні прямій *L*. З цих двох виберемо той, який має початок в

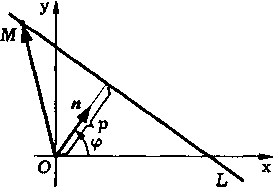


Рис. 8.7. Нормальне рівняння прямої

точці *О* і напрямлений "у бік прямої" *L* (рис. 8.7).

Обраний вектор  однозначно визначається своїм кутом φ з віссю *Ох*, який визначається проти ходу годинникової стрілки. Координати вектора  обчислюються через цей кут: .

Умова, що точка *М* (*х; у*) належить прямий *L*, еквівалентна тому, що ортогональна проекція радіус-вектора точки *М* на напрям нормального вектора прямої дорівнює відстані *р* від точки *О* до прямої: .

Проекція  збігається зі скалярним добутком векторів  і , оскільки довжина нормального вектора  дорівнює одиниці, і це призводить до рівності . Запишемо скалярний добуток  в координатах: .

Це рівняння називають нормальним рівнянням прямої. Параметрами в цьому рівнянні є кут φ між нормальним вектором прямої і віссю *Ох* і відстань від початку системи координат до прямої.

Загальне рівняння прямої  можна перетворити в її нормальне рівняння діленням на нормуючий множник , знак якого вибирається протилежним знаку *с*. За абсолютною величиною нормуючий множник є довжиною нормального вектора  прямої, а вибір знака означає вибір потрібного напрямку з двох можливих. Якщо *с* = 0, то пряма проходить через початок координат (*р* = 0). В цьому випадку знак нормуючого множника можна обирати будь-який.

◄Приклад 8.2. Записати нормальне рівняння прямої із її загального рівняння 

Розв’язання. Обчислимо нормуючий множник , який для даної прямий від’ємний і дорівнює . Тому нормальне рівняння прямої має вигляд:

.

В даному випадку маємо *р* = 2, ►

**8.2. Взаємне розташування двох прямих**

Фіксуємо на площині прямокутну систему координат. Дві прямі на площині можуть бути паралельними, співпадати або перетинатися. Прямі що перетинаються можуть бути перпендикулярними. Яка з цих можливостей реалізується для прямих  і , завжди можна з'ясувати за допомогою їх загальних рівнянь:





Для паралельності прямих  і  необхідно і достатньо, щоб були колінеарними їх нормальні вектори  і  а колінеарність векторів рівносильна пропорційності їх координат. Тому

.

Оскільки остання рівність перетворюється на співвідношення , то отримана умова паралельності двох прямих може бути записана за допомогою визначника другого порядку:

.

Прямі  і  перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли ортогональні їх нормальні вектори. Умова ортогональності нормальних векторів  і еквівалентна рівності нулю їх скалярногодобутку , тобто .

І умову паралельності, і умову перпендикулярності можна записати через кутові коефіцієнти прямих. Для цього необхідно виразити кутові коефіцієнти прямих через коефіцієнти їх загальних рівнянь: ,. Ці вирази дозволяють записати умови наступним чином:

- умова паралельності: ;

- умова перпендикулярності: .

Дві прямі, що перетинаються і  утворюють два суміжних кута. Один з цих кутів збігається з кутом між нормальними векторами. А кут між двома векторами можна обчислити за допомогою скалярного добутку. Зазначимо, що косинуси двох суміжних кутів відрізняються знаками, оскільки. При цьому додатне значення косинуса відповідає гострому куту. Значення φ (меншого з кутів між прямими  і ) обчислюється за формулою:

.

Кут між прямими можна також виразити через кутові коефіцієнти прямих. Цей кут є різницею кутів нахилу прямих. Якщо і  - кутовий коефіцієнт прямої  і , то

.

Значення гострого кута повороту з урахуванням його напрямку визначається за формулою:

.

**8.3. Відстань від точки до прямої**

Для обчислення відстані від даної точки *М* до прямої *L* можна використовувати різні способи. Наприклад, якщо на прямій *L* взяти довільну точку, то можна визначити *ортогональну проекцію вектора на напрям нормального вектора прямої.* Ця проекція з точністю до знака і є потрібна відстань.

Інший спосіб обчислення відстані від точки до прямої базується на використанні **нормального рівняння прямої**.

Нехай пряма *L* задана нормальним рівнянням. Якщо точка *М* (*х; у*) не лежить на прямій *L*, то ортогональна проекція  i радіус-вектора

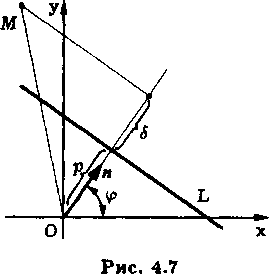


Рис. 8.8. Відстань від точки до прямої

точки *М* на напрямок одиничного нормального вектора  прямої *L* дорівнює скалярному добутку векторів  і , тобто . Ця ж проекція дорівнює сумі відстані *р* від початку координат до прямої і деякої величини δ. Величина δ по абсолютній величині дорівнює відстані від точки *М* до прямої. При цьому δ > 0, якщо точки *М* і *О* знаходяться по різні сторони від прямої, і δ <0, якщо ці точки розташовані по одну сторону від прямої. Величину δ називають **відхиленням точки *М* від прямої**. Відхилення δ для точки *М* (*х; у*) від прямої *L* обчислюється як різниця проекції і відстані *р* від початку координат до прямої, тобто .

За цією формулою можна отримати і відстань *p*(*M*, *L*) від точки

*М* (*х*; *у*) до прямої *L*, заданої нормальним рівнянням:

*p*(*M, L*) = | δ | = | *xcos*φ *+* *ysin*φ - *p* |.

Враховуючи наведену вище процедуру перетворення загального рівняння прямої в її нормальне рівняння, отримуємо формулу для відстані від точки *М* (*х*; *у*) до прямої *L*, що задана своїм загальним рівнянням:

.

◄Приклад 8.3. Знайти загальні рівняння висоти АН, медіани АМ і бісектриси АD трикутника АВС, що виходять з вершини А. Відомі координати вершин трикутника А (-1; -3), В (7, 3), С (1; 7).

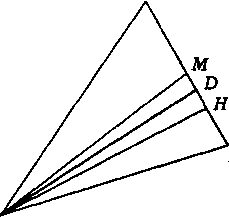
Розв’язання. Під зазначеними рівняннями маються на увазі рівняння прямих LAH, LAM і LAD, на яких розташовані відповідно висота АН, медіана

Рис. 8.9. Ілюстрація до задачі 8.3

AM і бісектриса AD зазначеного трикутника.

Щоб знайти рівняння прямої LAM, скористаємося тим, що медіана ділить протилежну сторону трикутника навпіл. Знайшовши координати (х1; y1) середини сторони BC x1 =(7 + 1)/2=4, y1= (3+7)/2=5, записуємо рівняння для LAM у вигляді рівняння прямої що проходить через дві задані точки:

.

Після перетворень одержуємо загальне рівняння медіани:

8х - 5y - 7 = 0

Щоб знайти рівняння висоти LAH, скористаємося тим, що висота перпендикулярна протилежній стороні трикутника. Отже, вектор , що перпендикулярний висоті АН, буде нормальним вектором прямої LAH. Рівняння цієї прямої отримуємо, підставляючи координати точки А і нормального вектора прямої LAH в нормальне рівняння прямої:

(-6) (х + 1) +4(у + 3) = 0.

Після перетворень одержуємо загальне рівняння висоти

3х - 2у-3 = 0.

Щоб знайти рівняння бісектриси LAD, скористаємося тим, що бісектриса AD належить множині тих точок N (x; у), які рівновіддалені від прямих LAB і LAC. Рівняння цієї множини має вигляд:

p(N, LAB) = p(N, LAC)

Воно задає дві прямі, що проходять через точку А і ділять кути між прямими LAB i LAC навпіл. Скориставшись рівнянням прямої, що проходить через дві точки, знайдемо загальні рівняння прямих LAB i LAC :

LAB : 

LAC : 

Після перетворень одержуємо

LAB: 3x-4y-9=0

LAС: 5x-y+2=0.

Рівняння бісектриси, як геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута, запишемо у вигляді:



Перетворимо його, розкривши модулі:



В результаті отримаємо загальні рівняння двох прямих

.

Щоб вибрати з них рівняння бісектриси, врахуємо, що вершини В і С трикутника розташовані по різні сторони від шуканої прямої і тому підстановки їх координат в ліву частину загального рівняння прямої LAD повинні давати значення із різними знаками. Вибираємо рівняння, відповідне верхньому знаку, тобто



Підстановка координат точки B в ліву частину цього рівняння дає від'ємне значення, оскільки



і такий же знак виходить для координат точки С, так як



Отже, вершини В і С розташовані по одну сторону прямої з обраним рівнянням, а тому рівнянням бісектриси є

******►

**8.4. Приклади розв’язання типових задач**

**Задача 1.** В декартовій прямокутній системі координат задано дві прямі, що перетинаються  і точка , що неналежить жодній з заданих прямих. Знайти напрямки сторін того з чотирьох кутів, утворених прямими, в якому лежить точка .

***Означення***. *Кажуть, що точка лежить в середині кута, сторонами якого є промені , якщо точка  і промінь  лежать з однієї сторони від прямої, що містить промінь , і точка і промінь  лежать з однієї сторони від прямої, що містить промінь .*



**Розв’язання**. Нехай точка  - точка перетину заданих прямих. Точка  ділить першу пряму на два променя: напрямок одного з них визначається вектором , а напрямок іншого – вектором . Якщо розташувати вектори так, щоб вони виходили з точки А, то кінець потрібного нам вектора повинен лежати з тієї ж сторони другої прямої, що і точка М. Нехай точка В – кінець вектора . Тоді її координати . Щоб дізнатися, чи задовольняє умову задачи вектор , чи протилежний йому вектор підставимо в рівняння другої прямої координати точок М і В. Якщо отримаємо числа різних знаків, то умові буде задовольняти вектор . Аналогічні міркування проводимо і для другої прямої. Знайдені таким чином вектори і будуть визначати напрямки сторін кута, що містить точку М.

**Задача 2.** Знайти умови, необхідні і достатні для того, щоб точка  лежала в середині трикутника, сторони якого задано рівняннями:

***.***

***Означення***. *Кажуть, що точка лежить в середині трикутника АВС, якщо вона розташована з однієї сторони від прямої (АВ) разом із точкою С, з однієї сторони від прямої (ВС) разом із точкою А і з однієї сторони від прямої (АС) разом із точкою В.*

**Розв’язання**. Знайдемо координати  ** точки С перетину першої та другої прямих розв’язуємо систему рівнянь за правилом Крамера):

* *

Для того, щоб точки *М* і *С* лежали з одного боку від прямої *АВ*, необхідно і достатньо, щоб числа  ** були однакових знаків. Так само запевняємося в тому, що для того, щоб точки *М* і *В* лежали з однієї сторони від прямої (*АС*), необхідно і достатньо, щоб були однакові знаки у чисел . І, на останок, щоб точки *М* і *А* були розташовані з однієї сторони від прямої (*ВС*), необхідно і достатньо, щоб були однакових знаків числа

. Звідси слідує, що якщо точка М лежить в середині трикутника АВС, то числа або мають такий самий знак, як і визначники

, або знаки їм протилежні. І навпаки, якщо ця умова виконана, то числа або мають такі самі знаки, як і числа , або знаки їм протилежні. Таким чином, для того, щоб точка М лежала в середині трикутника, сторони якого мають рівняння 

Необхідно і достатньо, щоб числа мали б такий самий знак, що і визначники , або знак протилежний їм.

Висновки: для того, щоб точка М лежала в середині трикутника, сторони якого мають рівняння 

Необхідно і достатньо, щоб числа мали б такий самий знак, що і визначники , або знак протилежний їм.

**Задача 3.** В прямокутній декартовій системі координат задано рівняння прямих  і точка . Записати рівняння бісектриси того кута між заданими прямими в якому лежить точка М.

**Розв’язання**. Нехай точка - довільна точка шуканої бісектриси, що лежить в середині потрібного кута. За означенням бісектриси, як геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута, можемо записати:

. Так як точки М і Р лежать в середині одного кута, то вони розташовані з однієї сторони як відносно першої прямої, так і відносно другої прямої. Тому числа  мають однакові знаки; числа  також мають однакові знаки. Тоді рівняння шуканої бісектриси буде , якщо числа  одного знака, і , якщо ці числа протилежних знаків. Висновки: шукане рівняння бісектриси:  або .

**Задача 4**. ( обов’язкова) Задано координати вершин трикутника АВС: А(-2;6), В(8;11), С(2;-2).

Знайти:

1. Канонічне та загальне рівняння сторони АВ; рівняння прямої у відрізках, рівняння з кутовим коефіцієнтом та загальне рівняння сторони ВС; нормальне та загальне рівняння сторони АС; довжини всіх сторін трикутника.
2. Внутрішні кути трикутника АВС.
3. Рівняння медіани АМ, бісектриси АL та висоти AH, що проведені з вершини А.
4. Площу трикутника АВС.

**Розв’язання**.



1) Сторона АВ: напрямний вектор . Канонічне рівняння: . Загальне рівняння: 

Довжина сторони АВ: (од.)

Сторона ВС: напрямний вектор ;

Кутовий коефіцієнт: . Шукане рівняння з кутовим коефіцієнтом набуває вигляду: . Підставимо у рівняння координати точки С: . Помножимо обидві частини рівняння на (-6) і перенесемо всі доданки в ліву частину:  Це загальне рівняння сторони ВС.

Довжина сторони ВС: (од.)

Сторона АС: напрямний вектор ; запишемо будь-який вектор, що перпендикулярний напрямному: , шукане загальне рівняння набуде вигляду: .. Помноживши обидві частини на нормуючий множник отримаємо нормальне рівняння: .

Довжина сторони АС: .

2) Кути трикутника шукатимемо, використавши скалярний добуток векторів.

Кут А: .

Кут В: .

Кут С: оскільки трикутник прямокутний, то .

3) Рівняння медіани АМ: знайдемо координати точки М, як середини відрізка ВС: . Напрямний вектор . Канонічне рівняння медіани: .

Рівняння висоти AH знайдемо, як рівняння прямої, що перпендикулярна ВС і проходить через точку А: вектором нормалі прямої (AH) може слугувати напрямний вектор прямої (ВС). Тоді загальне рівняння висоти: .

Рівняння бісектриси АL: шукатимемо, як рівняння геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута: . Для розкриття модулів візьмемо будь-яку точку в середині того самого кута А, нехай це буде точка Р(0;5). Підставимо координати цієї точки в рівняння сторін.  і. Отже, шукане рівняння бісектриси набуває вигляду: .

4) Площу трикутника АВС знайдемо використавши векторний добуток. Для цього

запишемо вектори  і як вектори простору . Їх векторний добуток . Площа трикутника дорівнюватиме половині довжини цього вектора: (кв.од.).

**Відповідь:** 1) Рінняння: АВ: ; ВС: ; АС: .

Довжини: ; ; .

2) ; ; .

3) Медіана АМ: ; висота AH: ; бісектриса АL: .

4) (од.кв.)

**Задача 5**. Задано рівняння сторони АВ:  трикутника АВС, координати вершини С(-3;2) і тангенси внутрішніх кутів, прилеглих до сторони АВ: . Знайти рівняння двох інших сторін трикутника.



**Розв’язання.** Невідомі рівняння будемо шукати як рівняння прямих з кутовим коефіцієнтом. Позначимо кутовий коефіцієнт прямої (АВ) через ; кутовий коефіцієнт прямої (ВС) через  і кутовий коефіцієнт прямої (АС) через .

***Означення.*** *Тангенс кута між прямими, що задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами  визначається за формулою .* (Домашнє завдання – довести формулу).

Тоді тангенс кута між прямими (АВ) і (ВС)  . Шукане рівняння сторони (ВС) набуде вигляду: . Знайдемо  підставивши в рівняння координати точки С: . Рівняння (ВС): . Аналогічно, знайдемо рівняння (АС): . Отже, пряма (АС) має рівняння .

**Відповідь**: (ВС): ; (АС): .

**Задача 6**. (обов’язкова) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку А(-2; 1):

1. паралельну осі Оy;
2. що утворює з віссю Оx кут ;
3. перпендикулярно вектору ;
4. паралельно бісектрисі першого координатного кута;
5. перпендикулярно прямій ;

такої, що відтинає на осі Оy відрізок довжиною 5.

**Розв’зання.**

1.  .
2. .
3. 
4. Рівняння бісектриси: . Напрямний вектор прямої може бути . Тоді .



1. Вектор може бути напрямним вектором шуканої прямої, тоді 
2.  або 

**Задача 7**. З пучка прямих, що визначаються рівнянням  знайти ту пряму, що проходить через точку А(-2;5).

**Розв’язання**. Підставимо координати точки А в рівняння пучка для визначення *k*: .

Підставимо отримане значення *k* в рівняння пучка: .

**Відповідь**: .

**Задача 8**. Скласти рівняння прямої у полярних координатах, якщо відомо, що вона проходить через точку  і нахилена до полярної осі під кутом .

**Розв’язання**.

Рівняння прямої в полярних координатах має вигляд: .



Тоді . .



Отже рівняння шуканої прямої .

**Відповідь**: .

**Задача 9**. (обов’язкова) Знайти множину точок площини – центрів кіл, що дотикаються до осі абсцис та проходить через точку В(0;3), зробити рисунок.

**Розв’язання**. Шукане геометричне місце точок має таку властивість: відстань від центра кола до точки В дорівнює відстані від центра до осі абсцис і дорівнює радіусу кола. Нехай координати ценра кола , тоді . Виконаємо дії: - це парабола.



**Відповідь**: шукана множина точок – це парабола.